Corrigé

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On a donc pour $n = 0$, $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1+\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$.

2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\,;\,+\infty\right[$.

a. On veut montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

Initialisation : on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{4}{5}$; de plus $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{4}{5} \leqslant 2$, donc :
$\frac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$: l'encadrement est vrai au rang 0 ;
Hérédité : on suppose que pour $n \geqslant 0$, $\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.
La fonction f étant croissante les images des quatre nombres ci-dessus sont rangées dans le même ordre, soit : $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$.
Or on a vu que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}$ et on a $f(2) = \frac{8}{1+6} = \frac{8}{7}$;
de plus $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ donc $\frac{4}{5} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \frac{8}{7}$.
Or $\frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ et $\frac{8}{7} < 2$; on a donc finalement :
$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$: l'encadrement est donc vrai au rang $n+1$.
Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang $n \geqslant 0$, il est vrai au rang $n+1$: par le principe de récurrence pour tout entier naturel n, on a :
$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

b. La suite (u_n) est croissante et elle majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite ℓ telle que : $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 2$.

c. La fonction f est continue car dérivable au moins sur $\mathbb{R}_+$ donc la limite ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$; on résout cette équation :

$$f(\ell) = \ell \iff \frac{4\ell}{1+3\ell} = \ell \iff 4\ell = \ell(1+3\ell) \iff 0 = \ell(1+3\ell-4)$$

$$\iff \ell(3\ell-3) = 0 \iff 3\ell(\ell-1) = 0 \iff \left[\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell - 1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{rcl} \ell & = & 0 \\ & \text{ou} & \\ \ell & = & 1 \end{array}\right.$$

Comme $\ell \geqslant \dfrac{1}{2}$, la seule solution possible est 1 ; la suite (u_n) converge vers 1.

3. **a.** On complète la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$:

```
def seuil(E) :
  u = 0,5
  n = 0
  while 1 - u >= E
    u = 4 * u/(1 + 3 * u)
    n = n + 1
  return n
```

b. On obtient $u_7 \approx 0{,}999\,939$, donc $1 - u_7 < 10^{-4}$. Le programme renvoie $n = 7$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$$

a. Pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}}$ soit en utilisant la définition de u_{n+1} :

$v_{n+1} = \dfrac{\frac{4u_n}{1+3u_n}}{1 - \frac{4u_n}{1+3u_n}}$ soit en multipliant chaque terme par $1 + 3u_n$:

$v_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1 + 3u_n - 4u_n} = \dfrac{4u_n}{1 - u_n} = 4\dfrac{u_n}{1 - u_n} = 4v_n$.

L'égalité, vraie pour tout naturel n, $v_{n+1} = 4v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de raison 4, de premier terme $v_0 = \dfrac{u_0}{1 - u_0} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.

On sait qu'alors , pour tout entier naturel n, $v_n = 1 \times 4^n = 4^n$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n} \iff v_n(1 - u_n) = u_n \iff v_n - u_n v_n = u_n \iff v_n = u_n v_n + u_n \iff$
$v_n = u_n(v_n + 1)$.

Comme $v_n = 4^n$, $v_n \geqslant 1$, donc $v_n + 1 \geqslant 2$, donc $v_n + 1 \neq 0$ et finalement en multipliant par $\dfrac{1}{v_n + 1}$, on obtient $u_n = \dfrac{v_n}{v_n + 1}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

c. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4^n$, d'où en remplaçant dans l'écriture précédente :

$u_n = \dfrac{4^n}{4^n + 1}$ et en multipliant par $\dfrac{1}{4^n}$:

$u_n = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{4^n}}$. Or $\dfrac{1}{4^n} = \dfrac{1^n}{4^n} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0{,}25^n$, d'où $u_n = \dfrac{1}{1 + 0{,}25^n}$.

Comme $0 < 0{,}25 < 1$, on peut dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}25^n = 0$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{1}{1+0} = 1$.